1024. Symmetric group 及ビ full linear group ノ character ニツイテ

小暮　勝美 (東大)

談話 993, 994 ト関聯シテ、對稱群 π_f ト full linear group $GL(n)$ ノ character ニツイテ, ヨク知ラレタ結果ヲ導キ出ス一ツノ方法ヲ述ベタイト思ヒマス。

コノ談話ハ順序トシテハ上ノ二ツノ談話ノ中間ニ位置スルモノデ, 話ノ準備トシテハ談話 994 ノ §2 ヲ以テ代ヘマス(ソノ中ノ character ニ関スル部分ハ除外シテ). 但シソコニハ間違ガアリマシタカラ訂正シマス。第677頁中段デ F_S トカイタノハ SF トカクコトヽシテ, 次頁6行目ノ $P_f e$ ハ $\hat{e} P_f$ ト訂正致シマス. 從ッテ以下ノ §2 及ビ §4 ニ現ハレル $P_f e$, $P_f b$, $P_f ba$, $(P_f c)^*$ ハ夫々 $\hat{e} P_f$, $\hat{b} P_f = b P_f$, $\widehat{ba} P_f = ab P_f$, $(\hat{c} P_f)^*$ ト訂正シマス。

(尚ツイデナガラ、申シ添ヘマスガ談話 993 デハ、ドイツ文字ノ $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ トラテン文字ノ m, n トガ印刷ノ上デスッカリ区別ガツカナクナッテシマヒマシタ)

I. f 階ノ tensor space P_f ニ於テ, full linear group $GL(n)$ デ induce サレタ linear transformation 全体ノ linear closure ヲ $\mathfrak{A}$, 一方

symmetric group π_f ニヨル linear transformation 全体ノ linear closure ヲ γ トスルト, $\mathfrak{A}$, γ ハ完全可約デ互ニ他ノ commutator algebra デアル。

II. γ ハ π_f ノ group ring ρ ノ homomorphic ナ表現ニナッテヰルが, 表現が 0 ニナル全体ノナスρノ ideal ヲ ρ^0 トスルト $\rho = \rho_0 + \rho^0$ トシテ ideal $\rho_0 \cong \gamma$ がキマル. コノトキ ρ_0 ノ左 ideal σ ニ関スル構造ハ P_f ノ $\mathfrak{A}$-subspace Σ ニ関スル構造ト全ク類似シテヰル. 即チ σ ト Σ トハ

$$\sigma \rightarrow \hat{\sigma} P_f = \Sigma \tag{1}$$

デ一對一ニ對應シ、直和ハ直和ニ, isomorphic ナモノハ isomorphic ナモノヘト對應スル。

$$(\sigma = \rho e, \ e^2 = e \text{ ナラバ } \Sigma = \hat{e} P_f \text{ トナル})$$

III (ρ ノ構造)

ρハ完全可約デアルが、ソレハ f ノ partition

$$(\lambda): \quad f = \lambda_1 + \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_r$$

$$\lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \cdots \geqq \lambda_r > 0 \cdots \tag{2}$$

ニ對應シテ次ノ様ニ直既約 ideal ニ分解サレル.

$$\rho = \sum_{(\lambda)} \mathfrak{A}^{(\lambda)} \tag{3}$$

$\mathfrak{A}^{(\lambda)}$ ニ含マレル既約ナ左 ideal ハ (λ) ナル partition ニ對應スル例ノ diagram カラ作ラレタ idempotent

$$e^{(\lambda)} = \frac{1}{\mu^{(\lambda)}} c^{(\lambda)}, \quad c^{(\lambda)} = b^{(\lambda)} a^{(\lambda)}$$

デ與ヘラレルトコロノ $\rho C^{(\lambda)}$ ＝ isomorphic デアル。

ソシテ

$$\varepsilon^{(\lambda)} = \frac{1}{\mu^{(\lambda)^2}} \sum_{t \in \pi_f} t^{-1} C^{(\lambda)} t$$

トオケバ $\mathfrak{a}^{(\lambda)} = \rho \varepsilon^{(\lambda)}$, $\varepsilon^{(\lambda)^2} = \varepsilon^{(\lambda)}$ デアル。（C.G. p126）

IV. (2) ノ partition (λ) ニ對應スル $C^{(\lambda)}$, $\varepsilon^{(\lambda)}$ ヲ考ヘルトキ

$r \leqq n$ ナラバ $\hat{C}^{(\lambda)} P_f \neq 0$, $\hat{\varepsilon}^{(\lambda)} P_f \neq 0$

$r > n$ ナラバ $\hat{C}^{(\lambda)} P_f = 0$, $\hat{\varepsilon}^{(\lambda)} P_f = 0$

（C. G. P.128 參照，ソコデハ $C^{(\lambda)} P_f$ 等ヲ扱フガ、$\hat{C}^{(\lambda)} P_f$ デモ殆ンド同樣デアル）

第一ノ場合ノ (λ) ヲ proper ナ partition ト呼バウ。

尚，$\hat{\varepsilon}^{(\lambda)}$ デアル。

V. （ρ_0 ノ構造）

ρ_0 ハ (3) カラ proper ナル (λ) ニ對應スル部分ダケヲ全部集メタモノデアル． $\rho_0 = \sum_{(\lambda)} \rho \varepsilon^{(\lambda)}$, (λ) ハ proper

(証) $\varepsilon^{(\lambda)} \in \rho_0$ ナラ $\rho_0 \varepsilon^{(\lambda)} = \rho \varepsilon^{(\lambda)} \neq 0$ 故ニ II ニヨリ $\hat{\varepsilon}^{(\lambda)} P_f \neq 0$

又 $\varepsilon^{(\mu)} \notin \rho_0$ ナラ $\varepsilon^{(\mu)} \in \rho^0$ $\therefore$ $\varepsilon^{(\mu)} P_f = 0$

VI. ρe ($e^2 = e$) ヲ表現加群トシタトキノ π_f ノ表現ノ character ハ

$$\chi(s)=\sum_t e(t^{-1}s^{-1}t)=\sum_t e(t^{-1}st)$$

デアル。

(証) 前半ハ C.G. p105. 後半ハ $\chi(s)$ が class function ナルコトヨリ $\chi(s)=\chi(s^{-1})$ ダカラデアル。

VII. 上ニ於テ特ニ $e=\frac{1}{\lambda_1!\cdots\cdots\lambda_r!}a^{(\lambda)}$ トスルト $\rho a^{(\lambda)}$ ニヨル Π_f ノ表現ノ character ヲ得ル. ソレヲ $\psi^{(\lambda)}(s)$ トカケバ

$$\sigma(s)=\sum\psi^{(\lambda)}(s)\,\varepsilon_1^{\lambda_1}\cdots\cdots\varepsilon_n^{\lambda_n} \tag{4}$$

トナル. 但シ $\sigma(s)$ ハ S ヲ cycle デ表示シタトキニ長サ 1, 2, ……ノ cycle が夫々 $\alpha,\beta,$ ……ケアッタトスルト

$$\sigma(s)=\sigma_1^{\alpha}\sigma_2^{\beta}\cdots\cdots,\quad \text{但シ}\ \sigma_i=\varepsilon_1^i+\cdots\cdots+\varepsilon_n^i$$

トスル ($\varepsilon_1,\cdots\cdots,\varepsilon_n$ ハ変数) (C.G. p210)

VIII. eP_f ヲ表現加群トシタトキノ $GL(n)$ ノ表現ノ character ハ

$$X(A)=Sp(A_f\,U(e))$$

デアル、但シ A_f, $U(e)$ ハ夫々 A, e ニヨリ P_f ノ linear transformation ノ matrix トスル(一ツノキメタ座標系デ)

(証) eP_f ノ一ツノ base ヲ $F_1,\cdots\cdots,F_h$ トシ, ソレニ $F_{h+1}\cdots\cdots F_{nf}$ ヲツケ加ヘテ P_f ノ base トスル,

$$A(F_1,\cdots\cdots,F_h,F_{h+1},\cdots\cdots,F_{nf})$$
$$=(F_1,\cdots\cdots,F_h,\cdots\cdots F_{nf})\begin{pmatrix}\Phi(A) & * \\ 0 & *\end{pmatrix}$$

両辺ニ e ヲ operate スルト

$$eA(F_1, \cdots\cdots, F_h, \cdots\cdots F_n f)$$

$$= (F_1 \cdots\cdots F_h, eF_{h+1} \cdots\cdots eF_n f)\begin{pmatrix} T(A) & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

$$= (F_1 \cdots\cdots F_h, F_{h+1}, \cdots\cdots F_n f)\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ & \ddots & & * \\ & & 1 & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right)\begin{pmatrix} T(A) & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

$$= (F_1 \cdots\cdots F_h, F_{h+1} \cdots\cdots F_n f)\begin{pmatrix} T(A) & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

サテ $\chi(A) = Sp(T(A))$ デアルガ上式ヨリ，ソレハ eA ニヨル P_f ノ linear transformation ノ Spur ニ等シイ．即チ $Sp(U(e)A_f) = Sp(A_f U(e))$ デアル。

IX. 上ニ於テ特ニ $\hat{e} = \frac{1}{\lambda_1! \cdots\cdots \lambda_r!} a^{(\lambda)}$ トオクト $a^{(\lambda)}P_f$ ニヨル $GL(n)$ ノ表現ノ character ガ得ラレル（$\hat{a}^{(\lambda)} = a^{(\lambda)}$）．ソレヲ $\Psi^{(\lambda)}(A)$ トカケバ

$$\Psi^{(\lambda)}(A) = u_{\lambda_1} \cdots\cdots u_{\lambda_r}$$

茲ニ $u_\lambda = \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=\lambda} \varepsilon_1^{\alpha_1} \cdots\cdots \varepsilon_n^{\alpha_n}$ （λ-te Wronskische Funktion aleph）トスル．但シ ε_i ハ A ノ characteristic roots トスル。

（証）$\Psi^{(\lambda)}(A) = Sp\left(A_f U\left(\frac{1}{\lambda_1! \lambda_2! \cdots\cdots} a^{(\lambda)}\right)\right)$

$$= \frac{1}{\lambda_1! \lambda_2! \cdots\cdots} \sum_p Sp(A_f U(p))$$

$$\left(\because\ a^{(\lambda)} = \sum_p p \right)$$

然ルニ $S_p(A_f U(s)) = \sigma(s)$ ガ言ヘル（X）．故ニ

$$\Psi^{(\lambda)}(A) = \frac{1}{\lambda_1!\lambda_2!\cdots\cdots} \sum_p \sigma(p)$$

$$= \frac{1}{\lambda_1!\lambda_2!\cdots\cdots} \sum_{p_1} \sigma(p_1) \sum_{p_2} \sigma(p_2) \cdots\cdots$$

但シ $\sum_{p_i}$ ハ young ノ diagram デ第 i 行ノ文字ノミヲ入レカヘル permutation 全体ニ亘ル和トスル。

トコロガ，ヨク知ラレテヰルヤウニ

$$u_\lambda = \sum_{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = \lambda} \varepsilon_1^{\alpha_1} \cdots\cdots \varepsilon_n^{\alpha_n} = \frac{1}{\lambda!} \sum_{s \in \pi_\lambda} \sigma(s)$$

（C. G. p215. 参照．ソコニ注意サレテヰルヤウニ，直接証明サレル．）

デアルカラ $\Psi^{(\lambda)}(A) = u_{\lambda_1} u_{\lambda_2} \cdots\cdots u_{\lambda_r}$

X．$S_p(A_f U(s)) = \sigma(s)$

（証）$A_f = \| a_{i_1 j_1} \cdots\cdots a_{i_f j_f} \|$，

$$U(s) = \left\| \delta^{i_1' \cdots\cdots i_f'}_{j_1 \cdots\cdots j_f} \right\|$$

$$\therefore\ A_f U(s) = \| a_{i_1' j_1} \cdots\cdots a_{i_f' j_f} \|$$

$s' = r^{-1} s r$ ナラバ $S_p(A_f U(s')) = S_p(A_f U(s))$ ナルコトハ定理Iニヨリスグワカルカラ，$A_f U(s)$ ノ Spur ヲトルニ當ッテハ

$$s = [(1\ 2 \cdots\cdots p)(p+1 \cdots\cdots p+q) \cdots\cdots]^{-1}$$

トシテモヨイ。スルト

$$Sp(A_f U(S))$$

$$= Sp\| a_{i_1 j_2} a_{i_2 j_3} \cdots a_{i_p j_1} a_{i_{p+1} j_{p+2}} \cdots \|$$

$$= \sum_{i_1, \cdots i_f} (a_{i_1 i_2} \cdots a_{i_p i_1})(a_{i_{p+1} i_{p+2}} \cdots) \cdots$$

$$= Sp(A^p) Sp(A^q) \cdots = \sigma_p \sigma_q \cdots$$

$$= \sigma_1^{\alpha} \sigma_2^{\beta} \cdots = \sigma(S)$$

但シ$\alpha, \beta \cdots$ハSノ長サ夫々$1, 2, \cdots$ナルcycleノ箇数デアル。

(此ノ証明ハSchur, Sitzungsbericht (Berlin) 1927 ノ §1 ヨリ)

XI. コヽニ現ハレタ$Sp(A_f U(S))$ハ又次ノ意味ヲ持ツ。

$$Sp(A_f U(S)) = \sum_{(\lambda)} \chi^{(\lambda)}(S) X^{(\lambda)}(A) \quad (\lambda)\text{ハproper}$$

但シ$\chi^{(\lambda)}(S)$, $X^{(\lambda)}(A)$ハ夫々$\rho C^{(\lambda)}$, $\hat{C}^{(\lambda)} P_f$ニヨルπ_f, $GL(n)$ノ表現ノcharacterトスル。

(証) V, II ニヨリ適当ナP_fノ座標系ニ対シ$\mathfrak{A}$ノA_fハ

$$A_f = \begin{pmatrix} \ddots & & \\ & \boxed{\begin{matrix} A^{(\lambda)} & & \\ & \ddots & \\ & & A^{(\lambda)} \end{matrix}} \; g^{(\lambda)}\text{ケ} & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

トカケル $A^{(\lambda)}$ハ$\hat{C}^{(\lambda)} P_f$ニヨル既約表現デ$g^{(\lambda)}$ハ$\rho C^{(\lambda)}$ノ階数ニ等シイ。之ヲ簡単ニ

$$A_f = \sum_{(\lambda)} E_{g^{(\lambda)}} \times A^{(\lambda)} \qquad (\lambda)\text{ハ proper}$$

トカケル.（$\sum$ ハココデハ matrix ノ直和，$\times$ ハ Kronecker 積，$E_{g^{(\lambda)}}$ ハ $g^{(\lambda)}$ 次ノ単位行列）

I ニヨリ $U(s)$ ハスベテノ A_f ノ可換ダカラ

$$U(s) = \sum B^{(\lambda)} \times E_{h^{(\lambda)}}, \quad h^{(\lambda)}\text{ハ}A^{(\lambda)}\text{ノ degree}$$

ナル形ヲナス.

$B^{(\lambda)} \times E_{h^{(\lambda)}}$ ハ $\varepsilon^{(\lambda)} P_f$ ニヨル π_f ノ表現ニナッテヰルガ，$\varepsilon^{(\lambda)} P_f$ ガ $P\varepsilon^{(\lambda)}$ ト加群デアリ，$P\varepsilon^{(\lambda)}$ ノ主単位元ナル $\varepsilon^{(\lambda)}$ ガ Einheits operator デアルコトニ注意スレバ，ソノ既約ナ部分ハ $PC^{(\lambda)}$ ト isomorphic. 然ルニ一方 $B^{(\lambda)}$ ハ既約デアル. 故ニ $B^{(\lambda)}$ ハ $PC^{(\lambda)}$ ニヨル π_f ノ表現 $U^{(\lambda)}(s)$ ニ等シイ:

$$U(s) = \sum U^{(\lambda)}(s) \times E_{h^{(\lambda)}}$$

一般ニ $(A \times B)(A_1 \times B_1) = AA_1 \times BB_1$ デアルコトニ注意スレバ

$$A_f U(s) = \sum_{(\lambda)} U^{(\lambda)}(s) \times A^{(\lambda)}$$

$$\therefore \quad Sp(A_f U(s)) = \sum_{(\lambda)} Sp(U^{(\lambda)}(s))\, Sp(A^{(\lambda)})$$

$$= \sum_{(\lambda)} \chi^{(\lambda)}(s)\, X^{(\lambda)}(A)$$

但シココノ $\sum$ ハ普通ノ和デアル。

XII. $\varepsilon_1, \cdots\cdots, \varepsilon_n$ ヲ変数ト考ヘタトキ $X^{(\lambda)}(A)$ ヲ $X^{(\lambda)}$ トカケバ

$$\sigma(s) = \sum_{(\lambda)} \chi^{(\lambda)}(s)\, X^{(\lambda)}$$

(證) X, XI ニヨレバヨイ. ($X^{(\lambda)}$ ハ $\varepsilon_1, \cdots\cdots, \varepsilon_n$ ノ f 次ノ同次對稱式ナルコト明カデアル)

XIII. $l_i = \lambda_i + (n-i)$ $(i=1,\cdots\cdots,n)$ トシ, 又 $|\varepsilon_i^{l_k}|$ ナル行列式ヲ $|\varepsilon^{l_1}\cdots\cdots\varepsilon^{l_n}|$ トイフ風ニカクコトニスレバ

$$\frac{|\varepsilon^{l_1}\cdots\cdots\varepsilon^{l_n}|}{|\varepsilon^{n-1}\cdots\cdots\varepsilon^{0}|} = |u_{\lambda_i - i + j}|$$

$$\left(u_p = \begin{cases} 1 & p=0 \\ 0 & p<0 \end{cases} \text{トスル}\right)$$

トナルコトハヨク知ラレテヰル. (C.G. P.203) 之レヲ $\tilde{X}^{(\lambda)}$ トカケバ $\sigma(s)$ ハ $\tilde{X}^{(\lambda)}$ ノ linear combination トシテ表セル. ソノ係數ヲ $\tilde{\chi}^{(\lambda)}(s)$ トカカウ.

$$\sigma(s) = \sum_{(\lambda)} \tilde{\chi}^{(\lambda)}(s)\, \tilde{X}^{(\lambda)} \qquad (\lambda)\ \text{ハ proper}$$

(證) proper ナ (λ) ニ對應スル $\tilde{X}^{(\lambda)}$ 全体ガ f 次ノ對稱式全体ノナス vector space ノ base ヲナスコトヲ示セバヨイ。$\tilde{X}^{(\lambda)} = \varepsilon_1^{\lambda_1}\varepsilon_2^{\lambda_2}\cdots\cdots\varepsilon_n^{\lambda_n} + \cdots\cdots$ ダカラ $\tilde{X}^{(\lambda)}$ ガ皆独立ナルコトハ明デアル。

f 次對稱式ノ次元ハ明カニ $x_1^{\lambda_1}\cdots\cdots x_n^{\lambda_n}$ $(\lambda_1 \geqq \cdots\cdots \geqq \lambda_n,\ f = \lambda_1 + \cdots\cdots + \lambda_n)$ ナル單項式ノ數デアルカラ, ソレハ丁度 proper ナ (λ) ノ箇數ニ等シイ。

XIV. $\tilde{X} = \sum \pm \Psi^{(l_1 - r_1, \cdots\cdots, l_n - r_n)}$

$$\tilde{x}^{(\lambda)}=\sum \pm \psi^{(l_1-r_1,\ \cdots\cdots,\ l_n-r_n)}$$

但シコノ和ハ alternating sum トスル ── 即チ $r_1, \cdots\cdots, r_n$ ハ $1, \cdots\cdots, n$ ノ permutation デ，ソレガ even ナルカ odd ナルカニ應ジテ ± ハ + カ − タトル。又 $\Phi^{(l_1-r_1,\ \cdots\cdots,\ l_n-r_n)}$ ハ $l_1-r_1, \cdots\cdots, l_n-r_n$ ナル partition（コノマヽデハ大イサノ順ニナッテヰナイ）ヲ (λ) トスルトキ $\Phi^{(\lambda)}$ ヲ意味スルモノトスル。
$\psi(l_1-r_1, \cdots\cdots, l_n-r_n)$ モ同様。

（証）$$\tilde{X}^{(\lambda)}=\sum \pm U_{l_1-r_1} \cdots\cdots U_{l_n-r_n}$$
$$=\sum \pm \Phi^{(l_1-r_1,\ \cdots\cdots,\ l_n-r_n)} \qquad (\text{IX} \text{ ニヨル})$$

$\tilde{x}^{(\lambda)}(S)$ ノ方ハ $\sigma(S)=\sum\limits_{(\lambda)} \tilde{x}^{(\lambda)}(S)\, \tilde{X}^{(\lambda)}$ ノ係数トシテ定義サレタノデアルカラ

$$\sigma\,|S|\,|\varepsilon^{n-1} \cdots\cdots \varepsilon^{0}| = \sum \tilde{x}^{(\lambda)}(S)\,|\varepsilon^{l_1} \cdots\cdots \varepsilon^{l_n}|$$

VII ニヨリ 左辺 $=\sum\limits_{\lambda_1+\cdots+\lambda_n=f} \psi^{(\lambda)}(S)\, \varepsilon_1^{\lambda_1} \cdots\cdots \varepsilon_n^{\lambda_n} \sum \pm \varepsilon_1^{r_1} \cdots\cdots \varepsilon_n^{r_n}$

$$=\sum \pm \psi^{(\lambda)}(S)\, \varepsilon_1^{\lambda_1+r_1} \cdots\cdots \varepsilon_n^{\lambda_n+r_n}$$

両辺ノ $\varepsilon_1^{l_1} \cdots\cdots \varepsilon_n^{l_n}$ ノ係数ヲ比較シテ

$$\tilde{x}^{(\lambda)}(S)=\sum \pm \psi^{(l_1-r_1,\ \cdots\cdots,\ l_n-r_n)}(S)$$

XV. $\rho a^{(\lambda)}$ ニ含マレル既約部分ハソレゾレ $\rho C^{(\mu)}$ ニ isomorphic ダガ，コノトキ $(\mu) \geqq (\lambda)$ デアル。（partition ノ位ノツケ方ハ普通ノ通リ）

（証）$c^{(\mu)} \rho a^{(\lambda)}=0 \qquad (\mu) < (\lambda)$

$$c^{(\lambda)}\rho a^{(\lambda)} \neq 0$$

ダカラデアル（C.G. p.124，(3.4)）

XVI. $\tilde{X}^{(\lambda)} = X^{(\lambda)}$，$\tilde{\chi}^{(\lambda)}(s) = \chi^{(\lambda)}(s)$

（証） XIV ニヨリ $\tilde{X}^{(\lambda)}$，$\tilde{\chi}^{(\lambda)}$ ハ夫々 compound character Ψ，ψ ノ linear combination デ表ハサレルカラ，従ッテ又 primitive ナ character X，χ デ表サレル．$\tilde{X}^{(\lambda)}$ ノ方ヲマトメテ matrix Λ ヲ使ヒ

$$(\tilde{X}^{(\alpha)}, \dots\dots, \tilde{X}^{(\lambda)}, \dots\dots, \tilde{X}^{(\omega)}) = (X^{(\alpha)} \dots\dots X^{(\omega)})\Lambda \quad \cdots(5)$$

トカケバ，$(\alpha) > \dots\dots > (\lambda) > \dots\dots > (\omega)$ トスルト Λ ハ

$\Lambda = (\lambda_{ij})$ $\lambda_{ij} = 0$，$i < j$ ナル形トナル：

$$\Lambda = \begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ 0 & & * \end{pmatrix}$$

何トナレバ

$$(\tilde{X}^{(\alpha)} \dots\dots \tilde{X}^{(\omega)}) = (\Psi^{(\alpha)} \dots\dots \Psi^{(\omega)})\Lambda_1,$$
$$(\Psi^{(\alpha)} \dots\dots \Psi^{(\omega)}) = (X^{(\alpha)} \dots\dots X^{(\omega)})\Lambda_2$$

トスルト Λ_1，Λ_2 ハ共ニ上記ノ型ノ matrix デアリ（Λ_2 ノ方 XV，II カラ明カ．Λ_1 ノ方ハ XIV ノ第一式カラ見エル）$\Lambda_2\Lambda_1 = \Lambda$ ダカラデアル．又 Λ_1，Λ_2 ノ形カラ明カナヤウニ，$\lambda_{ii} > 0$ デアル．又 XIII，XV ニヨリ，同ジ Λ ヲ用ヰテ

$$(\tilde{\chi}^{(\alpha)} \dots\dots \tilde{\chi}^{(\omega)}) = (\chi^{(\alpha)} \dots\dots \chi^{(\omega)})\Lambda$$

故ニ XII，XIII ト併セテ

$$(X^{(\alpha)} \cdots\cdots X^{(\omega)}) \begin{pmatrix} \chi^{(\alpha)}(S) \\ \vdots \\ \chi^{(\omega)}(S) \end{pmatrix} = (X^{(\alpha)} \cdots\cdots X^{(\omega)}) \Lambda\Lambda' \begin{pmatrix} \chi^{(\alpha)}(S) \\ \vdots \\ \chi^{(\omega)}(S) \end{pmatrix}$$

但シΛ'ハΛヲ transpose シタモノトスル。

$X^{(\lambda)}$ハ独立デアル.（(5)ヨリ）. 又更ニ$\chi^{(\lambda)}(S)$モ一次独立.

故ニ$\Lambda\Lambda' = E$. $\Lambda' = \Lambda^{-1}$, Λノ型ヲ考慮スレバΛハ diagonal matrix デアル. $\Lambda\Lambda' = E$ダカラ diagonal element λ_{ii}ハ$\lambda_{ii}^2 = 1$. $\lambda_{ii} > 0$ダカラ$\lambda_{ii} = 1$. $\therefore\ \Lambda = E$　故ニ$\widetilde{X}^{(\lambda)} = X^{(\lambda)}$, $\widetilde{\chi}^{(\lambda)} = \chi^{(\lambda)}$ヲ得ヲ. 即チ

XVII.（結論）

$\hat{C}^{(\lambda)} P_f$ニヨル$GL(n)$ノ表現ノ character (primitive) ハ

$$X^{(\lambda)}(A) = \frac{|\varepsilon^{l_1} \cdots\cdots \varepsilon^{l_n}|}{|\varepsilon^{n-1} \cdots\cdots \varepsilon^{0}|} \quad (= |u_{\lambda_i - i + j}|)$$

デアル. ソシテ$\rho C^{(\lambda)}$ニヨル$\mathfrak{S}_f$ノ表現ノ character ヲ$\chi^{(\lambda)}(S)$トスレバ

$$\sigma(S) = \sum_{(\lambda)} \chi^{(\lambda)}(S)\, X^{(\lambda)}(A) \qquad (\lambda)\text{ハ proper}$$

ナル関係が成立スル。

——（終リ）——